dostosowując swoje stanowisko do największej liczby pierwszej w polu widzenia. Może się nawet wycofać, przyznając, że nie zna wartości największej liczby pierwszej, ale podtrzymując twierdzenie, że taka liczba istnieje.

Najlepszym sposobem odpowiedzi na rozważane pytanie będzie pokazanie, że mając dowolny wyobrażalny zbiór liczb pierwszych, możemy utworzyć nową liczbę pierwszą spoza tej listy. Jeśli na przykład ktoś będzie twierdził, że istniej gdzieś największa liczba nieparzysta, możemy mu zaprzeczyć, mówiąc, że jeśli n jest nieparzyste, to $n + 2$ jest większą liczbą nieparzystą, nie może więc istnieć największa liczba nieparzysta. To podejście nie sprawdza się tak łatwo w przypadku liczb pierwszych – mając skończoną listę liczb pierwszych, nie mamy sposobu na wykorzystanie tego zbioru do wytworzenia liczby pierwszej, która jest widocznie większa od wszystkich pozostałych. Może więc jednak istnieje największa liczba pierwsza? Skąd mamy wiedzieć, że nasz uparty rozmówca nie ma racji?

A jednak Euklides z Aleksandrii (ok. 300 roku p.n.e.), grecki matematyk i ojciec wszystkich pojęć euklidesowych, to wiedział. Mając listę $p_1, p_2, \ldots, p_k$, gdzie każde p_i oznacza inną liczbę pierwszą, przyjął argumentację, która jest nieco bardziej subtelna. Pokazał, że musi istnieć jedna nowa liczba pierwsza (lub więcej) *w określonym zakresie liczb* (ale jego argumentacja nie pozwala nam zlokalizować, gdzie dokładnie w tym zakresie znajdują się te liczby).

Oto, jak to działa. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ będą listą k początkowych liczb pierwszych. Rozważmy liczbę n, która jest o jeden większa niż iloczyn wszystkich tych liczb, czyli $n = p_1p_2\ldots p_k + 1$. Liczba n jest liczbą pierwszą lub podzielną przez liczbę pierwszą mniejszą od siebie, którą nie może być żadna z liczb $p_1, p_2, \ldots, p_k$, gdyż jeśli p jest jedną z tych liczb, to podzielenie n przez p pozostawi resztę 1. Wynika stąd, że każdy pierwszy dzielnik n jest nową liczbą pierwszą, która jest większa od wszystkich liczb pierwszych $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i nie większa niż samo n. W szczególności wynika stąd, że nie może być skończonej listy liczb pierwszych zawierającej wszystkie liczby pierwsze, a więc ich ciąg można kontynuować w nieskończoność, nigdy go nie wyczerpując. Odwieczny dowód Euklidesa nieskończoności liczb pierwszych jest jednym z najbardziej podziwianych w całej matematyce.

Wprawdzie argumentacja Euklidesa nie mówi nam dokładnie, gdzie znaleźć następną liczbę pierwszą, ogólna częstość liczb pierwszych jest obecnie dobrze zrozumiała. Jeśli weźmiemy dwie dowolne liczby, powiedzmy a oraz b, bez żadnego wspólnego dzielnika, i rozważymy ciąg a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, …, to okaże się, jak to pokazał niemiecki matematyk Johann Dirichlet (1805–1859), że nieskończenie wiele elementów takiego ciągu to liczby pierwsze. (Oczywiście nie ma nadziei, jeśli a i b mają wspólny dzielnik, powiedzmy d, gdyż wtedy każdy element na liście będzie także wielokrotnością d i nie będzie liczbą pierwszą). Gdy $a = 1$, natomiast $b = 2$, otrzymamy znany nam ciąg liczb nieparzystych, który zgodnie z dowodem Euklidesa zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. W istocie na dość prostej adaptacji argumentacji Euklidesa można pokazać, że inne szczególne przypadki, takie jak ciąg liczb w postaci $3 + 4n$, $5 + 6n$ i $5 + 8n$ (gdy n przebiega przez kolejne wartości 1, 2, 3, …), mają nieskończenie wiele liczb pierwszych. Ogólny wynik Dirichleta jest jednak trudny do udowodnienia.

Inne proste stwierdzenie mówi, że zawsze istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza większa niż dana liczba n, ale mniejsza niż $2n$ (dla $n \geq 2$). (Jako przypomnienie powiedzmy, że operatory nierówności, jak ten, który oznacza większe lub równe, zawsze są skierowane w stronę mniejszej wielkości). Ten fakt, znany historycznie jako *postulat Bertranda*, można udowodnić, wykorzystując dość podstawową matematykę, choć sam dowód jest dość sprytny. Możemy zweryfikować postulat dla n do 4000, wykorzystując poniższą listę liczb pierwszych. Najpierw zobaczmy, że każda liczba na liście następująca po 2 jest mniejsza od dwukrotności swojej poprzedniczki:

2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001.